

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазинова Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

2-дәріс. Тартылыс теориясының негіздері

Дәрістің мақсаты. Жалпы әлемдік тартылыс заңының физикалық мәнін түсіну; материалдық нүктелер мен аспан денелерінің өзара тартылыс заңдылықтарын меңгеру; тартылыс өрісінің күштік функциясы мен потенциал ұғымдарын үйрену.

Жоспар

1. Жалпы әлем тартылыс заңы. Материалдық нүктелерінің өзара тартылысы.
2. Күштік функция. Потенциал.
3. Аспан денелерінің гравитациялық өрістері

1. Жалпы әлем тартылыс заңы. Материалдық нүктелерінің өзара тартылысы

Кез келген материалдық бөлшектер арасындағы тартылыс күшінің шамасын анықтайтын заң, И. Ньютонның 1666 ж. шыққан “Натурал философияның математикалық негіздері” еңбегінде баяндалған.

Ньютон заңның тұжырымдасы: *кез келген екі материалдық бөлшек бір-біріне өздерінің массаларының (m_1 , m_2) көбейтіндісіне тура пропорционал, ал арақашықтығының квадратына (r^2) кері пропорционал күшпен (F) тартылады:*

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

мұндағы G — гравитациялық тұрақты. Гравитациялық тұрақтының (G) сан мәнін 1798 ж. ағылшын ғалымы Г. Кавендиш анықтаған:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{H \cdot M^2}{K^2}.$$

Айдың Жерді, планеталардың Күнді айнала қозғалуын зерттеу нәтижесінде И. Ньютон ашқан бұл заң табиғаттағы барлық денелерге және олардың барлық бөліктеріне қолданылады. Аспан денелерінің қозғалысы жайындағы ғылым - аспан механикасының іргетасын қалайды. Осы заңның көмегімен аспан денелерінің қозғалу траекториясы есептелінеді және олардың аспан күмбездіндегі орындары алдын ала анықталады. Мысалы:

- ✓ Уран планетасының осы заңға сәйкес есептелінген орбитадан ауытқуы бойынша 1846 ж. Нептун планетасы ашылды.
- ✓ Плутон планетасы да 1930 ж. осындай тәсілмен анықталды.
- ✓ 19 - 20 ғасырларда бұл заңды алдымен қос жұлдыздарға, кейін шалғай орналасқан галактикаларға да пайдалануға болатындығы белгілі болды.

Жалпы салыстырмалық теориясының ашылуы (1916 ж.) нәтижесінде тартылыс күшінің табиғаты одан әрі айқындала түсті. Шындығында, кез келген дене кеңістікте тартылыс өрісін туғызады. Денелердің арасындағы тартылыс күші осы өріс арқылы беріледі. Табиғаттағы барлық денелер бір-біріне тартылады. Осыған бағынатын тартылыс заңды **бүкіләлемдік тартылыс заңы** деп атайды.

m массасы бар M және μ массасы бар P материалдық нүктелерді эвклид кеңістігінде қарастырайық. Осы материалдық нүктелер бір-бірінен r арақашықтығында орналасқан. Егер M -ді тартылу центрі, ал P -ні - тартылатын нүкте ретінде қарастырсақ және оның массасы $\mu=1$ болса. Сонда бірлік массасы бар P материалдық нүктені M материалдық нүкте осындай тартылыс күшімен әсеретеді:

$$F = G \frac{m}{r^2}. \quad (2)$$

(1) мен (2) формулалар координат жүйесіне тәуелсіз.

O - координат басы кезкелген кеңістіктің нүктесінде орналасқан және осьтері тұрақты бағытталған тікбұрышты декарт координат жүйесін қарастырайық. P - тартылатын нүктенің координаттарын x', y', z' , ал M - тартылу нүктесінің координаттарын x, y, z ретінде белгілейміз. Сонда

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (3)$$

тартылыс күшінің әр ось бойынша құраушылары

$$\begin{aligned} X &= Gm \frac{x - x'}{r^3}, \\ Y &= Gm \frac{y - y'}{r^3}, \\ Z &= Gm \frac{z - z'}{r^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Егер x', y', z' - тұрақты шамалар болса, ал x, y, z - ағымды координаттар болса, сонда

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

2. Күштік функция. Потенциал

$U(x, y, z) = U(P) = G \frac{m}{r}$ функцияны енгіземіз, оны дербес түрінде x координатасы бойынша дифференциалдайық

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -G \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x' - x}{r}. \quad (5)$$

Сонда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (6)$$

L кейбір бағытындағы күштің проекциясы

$$F_L = F \cos(F, L) = X \cos(L, x) + Y \cos(L, y) + Z \cos(L, z),$$

$$F_L = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(L, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(L, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(L, z) = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (7)$$

ал дербес жағдайда – радиус вектор бағытындағы P нүктесіне әсерететін тартылыс күштің проекциясы

$$F_r = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (8)$$

U - m массаның күштік функциясы немесе m нүктелік массаның потенциалы.

Күштік функцияның қасиеттері:

1. Бүкіл кеңістік бойынша $U(P)$ күштік функция шектеулі, бірімді және үздіксіз, тек M нүктесінде ол шексізге ұмтылады.

2. Егер P нүктесі M нүктесінен шексіз қашықтыққа орын ауыстыратын болса, $U(P)$ күштік функцияның мәні оң болса да шексіз төмендейді

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r \cdot U) = Gm \quad (9)$$

3. $U(P)$ күштік функцияның кез келген дәрежедегі барлық дербес туындылар P нүктесінің координаттары бойынша бүкіл кеңістікте шектеулі, бірімді және үздіксіз болады.

4. Егер $P \rightarrow \infty$ $U(P)$ күштік функцияның кез келген дербес туындысының шегі 0 болады

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -Gm \quad (10)$$

M нүктесінен басқа бүкіл кеңістікте $U(P)$ күштік функциясы осы теңдеуге сәйкес келеді:

Лаплас теңдеуі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

Лаплас операторы

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12)$$

Сонда $\nabla U = 0$,

$$\nabla U = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div} F \quad (13)$$

- **вектордың дивергенциясы** немесе **таралғыштығы**.

Кеңістіктегі нүктелердің геометриялық орыны **деңгейдің беті** немесе **изопотенциалдық бет** деп аталады, егер осы орындарда күштік функциясы бір ғана C мәніне ие болса.

Деңгейдің беті осы теңдеу арқылы анықталады

$$U(x, y, z) = C \quad (14)$$

Осыға дейін біз тек екі (M, P) материалдық нүкте бар және M – бекітілген нүкте, ал P -кеңістікте кез келеген орынға орналасуы мүмкін деп есептедік. Сол кезде U - күштік функция P нүктенің координаттар функциясы ретінде қарастырылды.

Бірақ кейбір жағдайларда екі материалдық нүкте тең әсерлі ретінде қарастыру қажет. m_1 массасы бар M_1 және m_2 массасы бар M_2 материалдық нүктелердің күштік функциясы

$$U = G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (15)$$

$$r = \overline{M_1 M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (16)$$

Күштік функция екі материалдық нүктенің алты координаттар функциясы ретіне алынады

$$U = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2).$$

Тартылыс күштердің координаттар осьтеріне проекциялары

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = G m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}, & Y_1 &= \frac{\partial U}{\partial y_1} = G m_1 m_2 \frac{y_2 - y_1}{r^3}, & Z_1 &= \frac{\partial U}{\partial z_1} = G m_1 m_2 \frac{z_2 - z_1}{r^3}, \\ X_2 &= \frac{\partial U}{\partial x_2} = G m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3}, & Y_2 &= \frac{\partial U}{\partial y_2} = G m_1 m_2 \frac{y_1 - y_2}{r^3}, & Z_2 &= \frac{\partial U}{\partial z_2} = G m_1 m_2 \frac{z_1 - z_2}{r^3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Осы кезде U – екі массаның күштік функциясы немесе m_1 және m_2 екі нүктелік массаларының өзара тартылыстың күштік функциясы.

Материалдық нүктелер жүйесінің күштік функциясы

Жүйенің n материалдық нүктелері $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ тартылыс центрлері ретінде қарастырамыз. M_i нүктенің массасын - m_i және OXYZ жүйдегі координаттарын - x'_i, y'_i, z'_i және бірлік массасы ($\mu=1$) бар, M_i нүктелерімен сәйкес келмейтін нүктені - $P(x, y, z)$ арқылы белгілегенде, келесі теңдеуін аламыз

$$r_i = \sqrt{(x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2}. \quad (18)$$

P нүктенің M_i материалдық нүктелер жүйесі әсерінен тартылуын қарастырайық. M_i нүктесі P нүктесіне әсерететін тартылыс күштің координаттық осьтеріне проекциялары

$$X_i = Gm_i \frac{x'_i - x}{r_i^3}, \quad Y_i = Gm_i \frac{y'_i - y}{r_i^3}, \quad Z_i = Gm_i \frac{z'_i - z}{r_i^3}. \quad (19)$$

Сонда P нүктесіне әсерететін барлық тартылыс күштердің теңәрекетті күштің проекциясы

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{x'_i - x}{r_i^3}, \\ Y &= \sum_{i=1}^n Y_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{y'_i - y}{r_i^3}, \\ Z &= \sum_{i=1}^n Z_i = G \sum_{i=1}^n m_i \frac{z'_i - z}{r_i^3}. \end{aligned} \quad (20)$$

$L(\alpha', \beta', \gamma')$ кейбір берілген бағытындағы теңәрекетті күштің проекциясы

$$F_L = \sum_{i=1}^n F_{iL} = \sum_{i=1}^n (\alpha' X_i + \beta' Y_i + \gamma' Z_i) \quad (21)$$

n нүктелік массасы бар жүйенің күштік функциясы

$$U = \sum_{i=1}^n U_i, \quad U_i = G \frac{m_i}{r_i}. \quad (22)$$

3. Аспан денелерінің гравитациялық өрістері

M массасы және $\rho(\vec{r}')$ тығыздығы бар T дененің кеңістікте орналасуы x, y, z координаттарымен белгіленсін (3 сурет).

Тартылыс күші потенциалды (тек қана тартылатын денелердің координаталарына тәуелді) болғандықтан, T дененің V гравитациялық потенциалын анықтаймыз.

$$\vec{F} = \text{grad}V \quad (23)$$

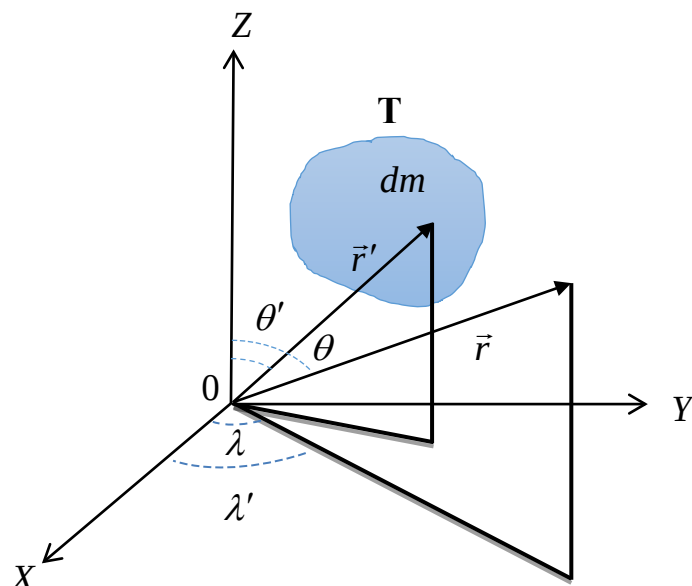
dV' көлемінде dm массасы бар дененің элементі $\vec{r}'$ радиус-векторы бар P нүктесіндегі потенциал

$$dV = G \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (24)$$

егер T дененің көлемі бойынша интеграл алып косинус теоремаларын қолданғанда

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}. \quad (25)$$

$\psi - \vec{r}, \vec{r}'$ - радиус-векторлар арасындағы бұрыш.



3 сурет – Кез келген аспан дененің гравитациялық потенциалын анықтау

(25)- ші формуладағы оң жағын Лежандр полиномдары арқылы жазамыз

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \psi) \left(\frac{r'}{r}\right)^n. \quad (26)$$

r, θ, λ сфералық координаталар арқылы **гравитациялық потенциалы**

$$\begin{aligned}
V = \frac{G}{r} & \left[P_n(t) \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \cos m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' + \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t) \sin m\lambda \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' \left(\frac{r'}{r} \right)^n d\nu' \right].
\end{aligned} \quad (27)$$

осында $t = \cos \theta$, $t' = \cos \theta'$, **Лежандр полиномдары**

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (28)$$

және қосылған **Лежандр функциялары**

$$P_n^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} (P_n(t)) \quad (29)$$

a - аспан дененің сызықтық өлшемі (жұлдыздың немесе планетаның экваториалдық радиусы) болса, сонда (27) формуланы $a^n M$ шамасына көбейтеміз және бөлеміз

$$J_n = \frac{1}{a^n M} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n(t') (r')^n d\nu' \quad (30)$$

- қатардың **зоналдық коэффициенттері**. Зоналдық коэффициенттері λ бойлыққа тәуелсіз және параллельдерде 0 айналады.

$$C_n^m = \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \cos m\lambda' d\nu', \quad (31)$$

$$S_n^m = \frac{2}{a^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{(T)} \rho(\vec{r}') P_n^m(t') \sin m\lambda' d\nu'$$

- **секториалды гармоникалар** - θ полярлық арақашықтыққа тәуелсіз және меридиандарда 0 айналады.

Егер $m < n$ болса, параллель және меридианардың доғаларымен құрастырылған қисықсызықты трапецияларында 0 айналады. Сонда осы коэффициенттер **тессералдық** деп аталады.

Дененің, оны қоршаған кеңістіктегі, гравитациялық потенциалы (27) формула арқылы анықталады.

Жұлдыздар мен планеталардың гравитациялық өрістері

Гравитациялық денелердегі тығыздықтың таралуының дербес жағдайларын қарастырайық.

1. Егер массаның таралуы сфералық симметрия заңына бағынса:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r')$$

Сонда барлық коэффициенттер 0 тең болады, тек қана $J_0 =$ Осы жағдайда дененің гравитациялық өрісі дененің масса центріне орналасқан M бірлік массасының өрісімен сәйкес келеді:

$$V = \frac{GM}{r}.$$

Мысалы: Күн немесе төменгі спектралдық кластағы жалғыз жұлдыздар (егер олардың ось бойынша айналу жылдамдығы аса жоғары болмаса).

2. Егер гравитациялық өрісті денеден аса үлкен арақашықтықта қарастырсақ. Денелер материалдық нүктелер ретінде аламыз.

$$V = \frac{GM}{r}.$$

1 кесте. Күн жүйесінің денелердің гравитациялық өрістері

Объект	GM, см ³ /с ²	J _n · 10 ⁶				
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Күн	1,33 · 10 ²⁶	<10	-	-	-	-
Меркурий	2,17 · 10 ¹⁹	~ -10	-	-	-	-
Шолпан	3,25 · 10 ²⁰	~ -4	-	-	-	-
Жер	3,99 · 10 ²⁰	-1083	2,54	1,58	0,22	0,59
Марс	4,30 · 10 ¹⁹	-1959	30	-10	-6	-3
Юпитер	1,27 · 10 ²³	-14733	-	-587	-	5
Сатурн	3,79 · 10 ²²	-16479	-	-937	-	11
Уран	5,8 · 10 ²¹	-3352	-	-29	-	-
Нептун	7,05 · 10 ²¹	-3411	-	-50	-	-
Ай	4,9 · 10 ¹⁸	-206	-37	33	-5	-

3. Егер дене осьтік симметрия заңына бағынса:

$$\rho(\vec{r}') = \rho(r', \theta')$$

Осы жағдайда барлық секториалды мен тессералды гармоникалар 0 тең болады, ал гравитациялық потенциал зоналдық гармоникаларға ие болады:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(t) \left(\frac{a}{r} \right)^n \right].$$

4. Егер массаның таралуы осьтік және экваториалдық жазықтыққа байланысты симметрия заңына бағынса (тығыздық – ендіктің жұп функциясы ретінде қарастырылса): барлық тақ зоналдық гармоникалар 0-ге тең болады. Гравитациялық потенциал

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_{2n} P_{2n}(t) \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \right].$$

3 пен 4 –ші пункт бойынша мысал ретінде газдық және сұйықтық денелерді алуға болады: ертегі спектралды кластағы тез айналатын жұлдыздар, қос жүйенің компоненттері, алып-планеталар. Қаттыденелі планеталар және олардың үлкен серіктеріне аз дәлділігімен орындалады.

Дененің қозғалысын қарастырған жағдайда міндетті түрінде қарастырып отырған уақыт аралығын ескеру қажет

Бақылау сұрақтары

1. Жалпы әлемдік тартылыс заңының физикалық мағынасы қандай?
2. Тартылыс күші қандай шамаларға тәуелді және оның бағыты қалай анықталады?
3. Гравитациялық тұрақты дегеніміз не және оның шамасы қандай?
4. Материалдық нүктелер арасындағы тартылыс күшінің формуласын жазыңыз.
5. Егер денелердің массасы екі есе артса және арақашықтық екі есе ұлғайса, тартылыс күші қалай өзгереді?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы //Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник.– Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006.– 256 с.
3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.

4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.

5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.

6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.